المحاضرة الأولى: عملي

1) أوجد متجه وحدة المماس لمنحني اللولب الدائري؟

الحل: اللولب الدائري تعطى معادلته بالشكل:

$$R=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt) \qquad a,b>0$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{T}=R'&=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)\\ |R'|&=\sqrt{a^2+b^2}=c\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{T}=\frac{R'}{|R'|}=\frac{(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)}{c}$$

$$=\left(-\frac{a}{c}\sin t,\ \frac{a}{c}\cos t,\ \frac{b}{c}\right)$$

2) ليكن لدينا المنحنيات الآتية:

هل هو نظامي عند النقطة $t=0$؟

a) $r_1(t)=(t^3,0,0)$

$$r_1'(t)=(3t^2,0,0)\Big|_{t=0}=(0,0,0)$$

بما أن $r_1'(t)$ عند النقطة $t=0$ يساوي الصفر أي: $r_1'(t)\Big|_{t=0}=0$

فالمنحني غير نظامي.

b) $r_2(t)=(t^3+t,0,0)$

$$r_2'(t)=(3t^2+1,0,0)\Big|_{t=0}=(1,0,0)$$

بالتالي المنحني نظامي لأن مشتق المتجه للمنحني $t=0$ لا يساوي الصفر.

3) ليكن لدينا المنحني:

$$y=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

هل يمثل هذا المنحني منحنياً أملس عند $x=0$؟

الحل:

$$y'=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x}=0$$

($x$: دالة صفرية، $\cos\frac{1}{x}$: دالة محدودة)

بما أن المشتق الأول $y'(0)=0$ فالمنحني $y$ غير أملس.

الوسيط الطبيعي: من أهم تطبيقات الوسيط الطبيعي حساب التقوس بعد إرجاع معادلة المنحني عن الوسيط $t$ إلى الوسيط $S$

مثال: إذا كان لدينا المنحني:

$$r(t) = (a\cos t, a\sin t, 0) \quad ; \quad a>0$$

أوجد الوسيط الطبيعي $S$ ثم اكتب معادلة المنحني بدلالة $S$؟

الحل:

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 0)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + 0} = \sqrt{a^2} = a$$

$$s = \int_0^t a\,d\tau = a\tau\Big|_0^t = at \Rightarrow t = \frac{s}{a}$$

- أوجد الوسيط الطبيعي للمنحني اللولبي؟
- إذا كان لدينا المنحني $r(t) = (t, \frac{t^2}{2}, 0)$ أوجد الوسيط الطبيعي؟

المستوي المماس:

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

تمرين: أوجد معادلة المستوي المماس للمنحني: $r(t) = (t, t^2, t^3)$ عند النقطة $t=1$؟

الحل: $M(X,Y,Z)$ نقطة اختيارية من المماس

$$r(1) = (1,1,1)$$

$$r'(t) = (1, 2t, 3t^2)\Big|_{t=1} = (1,2,3)$$

$$r''(t) = (0, 2, 6t)\Big|_{t=1} = (0,2,6)$$

معادلة المماس عند النقطة $t=1$ هي:

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3X - 3Y + Z = 1$$

معادلة المستقيم المماس عند $t = t_0$ : $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{X - x_0}{x'(t_0)} = \frac{Y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{z'(t_0)}$$

$x_0 = x(t_0)$ ,
$y_0 = y(t_0)$ ,
$z_0 = z(t_0)$

تمرين: أوجد معادلة المستقيم المماس للمنحني $r(t) = (t, t^2, t^3)$ عند النقطة $t = 1$ ؟

الحل:

$$\frac{X - 1}{1} = \frac{Y - 1}{2} = \frac{Z - 1}{3}$$

$$2X - Y = 1 \quad , \quad 3X - 2Z = 1$$

[illegible]

أو B مماس الناظم

$$T = \frac{R'}{|R'|} \quad , \quad T = R'$$

الناظم الأساسي

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|} = \frac{T'}{|T'|}$$

$$B = T \times N$$

المستوي الناظم: يحوي $B, N$ يعامد $T$ .

المستوي المماس: يحوي $N, T$ يعامد $B$ .

المستوي المقوم: يحوي $T, B$ يعامد $N$ .

معادلات المستويات:

المستوي الناظم: $(r(t) - r(t_0)) . T = 0$

المستوي المقوم: $(r(t) - r(t_0)) . N = 0$

تمرين: أوجد المستوي الناظم عند النقطة $t = 1$ للمنحني $(t, t^2, t^3)$ ؟

الحل: نأخذ $M(X, Y, Z)$ نقطة اختيارية

$$r(1) = (1, 1, 1)$$

$$T = \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$$

$$(X - 1, Y - 1, Z - 1) . \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3) = 0$$

الانحناء: $k_1 = |R''(s)|$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{|R' \times R''|}{|R'|^3}$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$\{y = f(x)\}$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

احسب انحناء المنحنى $(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3})$ عند [illegible]

الحل:

$$k_1 = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

$$r' = (1, t, t^2)\Big|_{t=1} = (1,1,1)$$

$$r'' = (0, 1, 2t)\Big|_{t=1} = (0,1,2)$$

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$$

$$|r' \times r''| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \therefore k_1 = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

الالتفاف: $k_2 = -B' \cdot N$

$$k_2 = \frac{(R', R'', R''')}{|R' \times R''|^2}$$

$$k_2 = \frac{(R', R'', R''')}{(R'')^2}$$

أوجد الانحناء والالتفاف للمنحنى الحلزوني الدائري؟

$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$

الحل: الوسيط الطبيعي للمنحني:

$S = c.t \; ; \; c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$t = \frac{s}{c}$

$x = a\cos\frac{s}{c} \; , \; y = a\sin\frac{s}{c} \; , \; z = \frac{bs}{c}$

$K_1 = |R''|$

$R' : \; x' = -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} \; , \; y' = \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} \; , \; z' = \frac{b}{c}$

$R'' : \; x'' = -\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c} \; , \; y'' = \frac{-a}{c^2}\sin\frac{s}{c} \; , \; z'' = 0$

$K_1 = |R''| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2}$ دقة

$K_2 = -B' . N$

$T = R' \Rightarrow T' = R''$

$N = \frac{T'}{|T'|} = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$

$|T'| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2}$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cos\frac{s}{c} & -\sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}$$

$B = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$

$B' = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$

$K_2 = \frac{b}{c^2}\cos^2\frac{s}{c} + \frac{b}{c^2}\sin^2\frac{s}{c} = \frac{b}{c^2}$ دقة

SABBAGH STATIONERY